حركة الجسيم المادي المقيد على خط منحني

د.اسكندر عمجة

التحريك

إذا اعتبرنا $\mathrm{M_k}$ جسيماً مادياً يتحرك على منحن صقيل معلوم وثابت يتأثر بالقوى الفاعلة $F_1^a F_3^a F_2^a$ المعينة بدلالة جملة محاور إحداثية $M\tau nb$ وتدعى ثلاثية فرينل فإذا حررنا الجسيم من قيوده واستبدلنا تأثيره برد الفعل N_k فإن العلاقة الأساسية في تحريك الجسيم المقيد $m_k\overrightarrow{A_k} = \Sigma\overrightarrow{F_k^a} + \overrightarrow{N_k}$.

- عندما يكون الجسيم مقيد يدرس بواسطة ثلاثية فرينل
- اتجاه المماس τ باتجاه تزايد الأقواس
- المستوي الناظمي للمسار Mbn يقع فيه رد الفعل N_k ويتجه عموديا على المنحني.
- المستوي الملاصق: $M\tau n$ يقع فيه التسارع الخطي.

وبإسقاط طرفي العلاقة على جملة المحاور الإحداثية:

1- على المحور المماس:

$$m_k A_k^\tau = \Sigma F_{ka}^\tau \ldots 2$$

2- على المحور الناظم الرئيسي:

$$m_k A_k^n = \Sigma F_{ka}^n \ldots 3$$

3- المحور الناظم الثانوي:

$$m_k A_k^b = \Sigma F_{ka}^b \ldots 1$$

وبما أن:

$$A_k^t = s^{\circ\circ} = v_k^{\circ} \qquad A_k^n = \frac{v_k^2}{\rho_k} \qquad A_k^b = 0$$

ملاحظة : $A_k^b = 0$ لأن التسارع له مركبتان فقط ..ومنه بالتعويض في 1 و2 و3:

$$m_k . s_k^{\circ\circ} = \Sigma F_{k_\tau}^a \ldots 1''$$

$$m_k.\frac{v_k^2}{\rho_k} = \Sigma F_k^a + N_k^n \dots 2"$$

$$0 = \Sigma F_k^a + N_k^b \dots 3"$$

وهذه المعادلات الثلاث السابقة تدعى بمعادلات حركة الجسيم المقيد على مسار منحني وفق صيغة أويلر ، وتستعمل في حل مسائل النوع الثاني لحركة الجسيم المقيد:

- المعادلة الأولى: "1 تمثل المعادلة التفاضلية لحركة الجسيم المقيد،التي تساعد في إيجاد معادلة حركته $s_k = f(t)$.
- أما المعادلتان "3 , "2 فإنهما تساعدان في حساب رد الفعل الناظمي التحريكي(الديناميكي) N_k

ملاحظة: في الحركة المنحنية لا يعتمد رد الفعل الناظمي التحريكي فقط على القوى الفاعلة المفروضة وعلى رد فعل القيد بل أيضاً على سرعة المتحرك v_k.

هذه الحالة التي تم دراستها كانت على منحني صقيل(أملس) أي قوى الاحتكاك معدومة

وفي حال المنحني الخشن فإنه ينبغي إضافة قوى الاحتكاك $Ff = f.N$ (المتجهة عكس اتجاه شعاع السرعة) إلى القوى الفاعلة

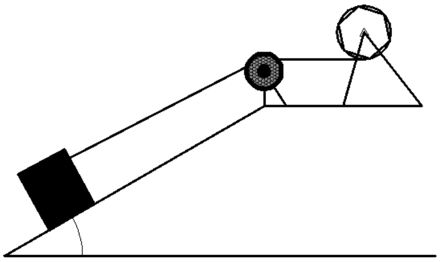
وعندها تصبح العلاقة الأساسية في التحريك:"

$$m_k.\vec{A} = \Sigma F_k^a + N_k + Ff_k$$

مسألة:/النوع الثاني في تحريك الجسيم المقيد.

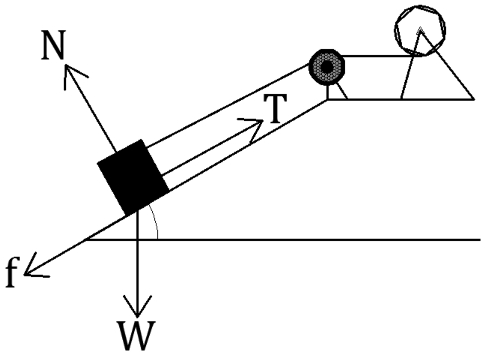
المعطيات: $\alpha = 30$ $v = 1.2m.s^{-1}$ $p = 4kw$ $m = 360kg$

المطلوب:معامل الاحتكاك f



الحل:

نحسب معامل الاحتكاك من علاقة شرط الانزلاق:



$$F_f = fN \Rightarrow f = \frac{F_f}{N}$$

نحسب القوى $N. F_f$في تطبيق العلاقة الأساسية لتحريك الجسيم المقيد عند أي وضع:

$$m.\vec{A} = \vec{F_f} + \vec{N} + \vec{W} + \vec{T}$$

بإسقاط العلاقة على منحى التسارع

$$0 = T - Ff - Wsin\alpha$$

$$Ff = T - mgsin\alpha$$

حساب T يتم من علاقة الإستطاعة W... حيث (F=T)

$$p = \frac{W}{t} = \frac{F\Delta x}{\Delta t} = F.v$$

$$p = Fv \Rightarrow F = \frac{p}{v} = 4 \times \frac{1000}{1.2} = 3333.3\text{N}$$

$$F_f = 3333.3 - 360(9.81)sin30 = 1567.53\text{N}$$

بإسقاط العلاقة الأساسية للتحريك على منحى N (عمودي على منحى التسارع):

$$0 = N - Wcos\alpha \Rightarrow N = mg.cos\alpha$$

$$N = 360 \times 9.81 \times cos30 = 3058.45\text{N}$$

بتعويض في علاقة معامل الإحتكاك:

$$f = \frac{1567.53}{305.45} = 0.51$$

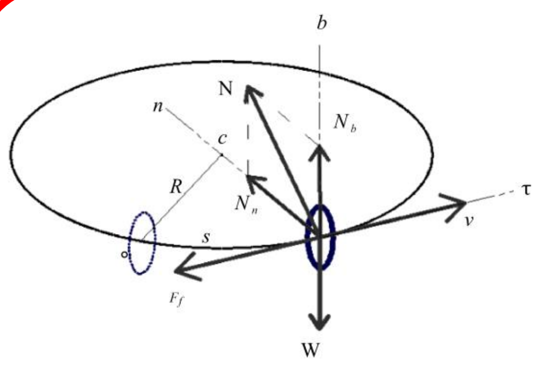
مسألة:/النوع الثاني في تحريك الجسيم المقيد على مسار منحني:

حلقة كتلتها mملظومة في سلك أملس دائري تكتسب

سرعة v_0 وتخضع لقوة مقاومة F حيث تعطى: $F = km\sqrt{v}$

المعطيات: $m = 360\text{kg}p = 4\text{kw}v = 1.2m.s^{-1}$

المطلوب:أوجد الزمن بالثواني حتى تتوقف الكتلة:



الحل:

نحرر الحلقة من قيودها بثلاثية فرينيه (لأن التقييد بين الحلقة والسلك هو قيد جزئي)

$$m.\vec{A} = \Sigma\vec{F} + \vec{N}$$

$$m\vec{A} = \vec{F} + \vec{W} + \vec{N}$$

بالإسقاط على العلاقة الأساسية في الاساسية في التحريك:

1- على المماس:

$$mA^{\tau} = -F = -mk\sqrt{v}$$

$$A^{\tau} = -k\sqrt{v}$$

$$\frac{dv}{dt} = -k\sqrt{v} \Rightarrow \frac{dv}{\sqrt{v}} = -kdt$$

$$\int_{v_0}^{v=0} v^{-\frac{1}{2}}\,dv = -k\int_{t_0}^{t} dt \Rightarrow 2\left[\sqrt{v}\right]_{v_0}^{v=0} = -k[t]_{t=0}^{t}$$

$$2(v - v_0) = -k(t - t_0)$$

لكن: $v = 0, t_0 = 0$

$$-2v_0 = -kt \Rightarrow 2v_0 = kt \Rightarrow t = \frac{2v_0}{k}$$